CHAPITRE 1

Circuits électriques ele-nccir.1 [1 - B. Ischi 15-16]

ele-nccir.2 Dans ce chapitre, nous allons étudier plusieurs circuits électriques composés d'un générateur, de résistances, de condensateurs et de bobines. Les éléments sont reliés par des fils dont la résistance est supposée nulle. Les tensions aux bornes des différents éléments sont mesurées avec un voltmètre et les courants avec un ampèremètre.

1. Symboles ele-nccir.3

ele-nccir.4 Les symboles utilisés pour représenter les différents éléments d'un circuit se trouvent sur dans le tableau 1.

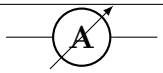
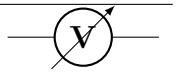
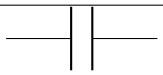
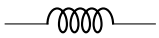
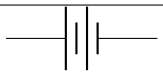
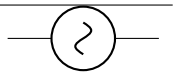
Fil		Résistance	
Ampèremètre		Voltmètre	
Condensateur		Bobine	
Source de tension continue		Source de tension alternative	
Interrupteur		Résistance variable	

TABLEAU 1. Symboles utilisés pour représenter les différents éléments d'un circuit électrique.

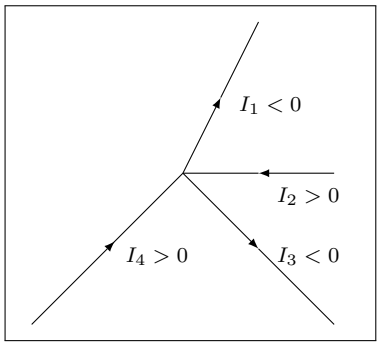
2. Lois de Kirchhoff ele-nccir.5

2.1. Première loi de Kirchhoff: Loi des nœuds. ele-nccir.6

ele-nccir.7 Un nœud est un point dont partent plusieurs fils. En vertu du principe de conservation de la charge, la somme algébrique des courants entrants et sortants est nulle:

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0$$

On peut, par exemple, adopter la convention de compter positivement les courants qui entrent et de compter négativement les courants qui sortent.



2.2. Deuxième loi de Kirchhoff: Loi des mailles. ele-nccir.8

ele-nccir.9 Si le flux du champ magnétique à travers un circuit électrique est constant, alors, en vertu de la troisième équation de Maxwell, pour tout chemin fermé (le bord ∂S d'une surface

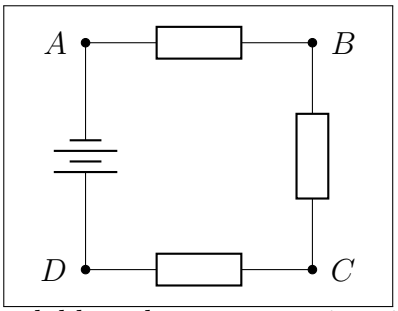
S),

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \;\Rightarrow\; \int_{\circlearrowleft \partial S} \vec{E} \bullet d\vec{l} = \int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) d\vec{S} = -\int_S \dot{\vec{B}}\, d\vec{S} = 0$$

Considérons par exemple le chemin

$$A \to B \to C \to D \to A$$

sur le circuit présenté ci-contre. Il y a un générateur et trois éléments quelconques. Alors,



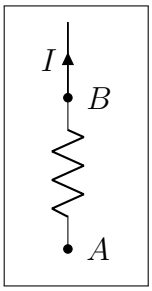
$$\int_{A\to B\to C\to D\to A} \vec{E} \bullet d\vec{l} = 0 \;\Rightarrow\; U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} + U_{DA} = 0$$

Cette loi est valable dans le cas de courants continus. Elle reste valable en bonne approximation avec des courants alternatifs à "basses fréquences". Pour de l'électronique hautes fréquences, l'auto-induction dans le circuit n'est plus négligeable.

3. Les Résistances ele-nccir.10

ele-nccir.11 Pour une résistance,

$$U_{AB} = R \cdot I$$



où I est le courant traversant la résistance, c'est-à-dire le débit de charge (unités: $\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}$ = A=ampère) compté positivement dans le sens de la flèche. La constante R est appelée la résistance (unités: $\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} = \Omega$=Ohm). Par exemple, pour un fil de section S et de longueur l,

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

où ρ est la résistivité du matériau utilisé. Par exemple,

$$\rho_{\text{cuivre}} = 1.68 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot m$$

$$\rho_{\text{verre}} = 10^{17}\ \Omega \cdot m$$

ele-nccir.12 La puissance dissipée par une résistance est donnée par (effet Joule)

$$P = U \cdot I = RI^2 = \frac{U^2}{R}$$

En effet, une charge q passant à travers la résistance perd une énergie égale à

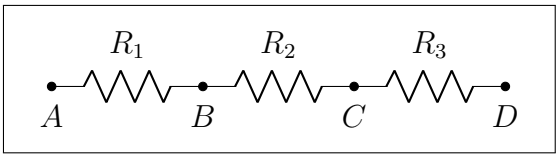
$$q \cdot U$$

Cette énergie est transformée en chaleur. La quantité d'énergie dissipée par unité de temps est donnée par

$$P = \frac{q \cdot U}{t} = U\frac{q}{t} = U \cdot I$$

3.1. Résistances en séries. ele-nccir.13

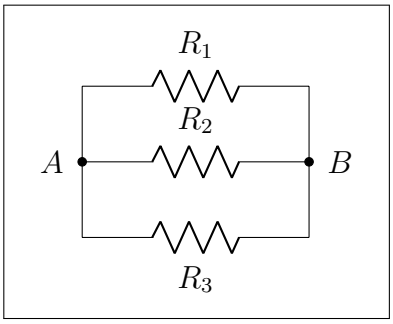
ele-nccir.14 Des résistances montées en série comme sur la figure ci-contre sont équivalentes à une résistance de résistance R_{equiv}. Le courant traversant toutes les résistances est le même. Par conséquent



$$U_{AD} = U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} = R_1 I + R_2 I + R_3 I = R_{equiv} I \;\Rightarrow\; \boxed{R_{equiv} = R_1 + R_2 + R_3}$$

3.2. Résistances en parallèle. ele-nccir.15

ele-nccir.16 Des résistances montées en parallèle comme sur la figure ci-contre sont équivalentes à une résistance de résistance R_{equiv}. La différence de potentiel aux bornes de toutes les résistances est la même. Par conséquent



$$U_{AB} = R_1 I_1 = R_2 I_2 = R_3 I_3 = R_{equiv} I \text{ et } I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{R_{equiv}} = \frac{I}{U_{AB}} = \frac{I_1 + I_2 + I_3}{U_{AB}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{R_{equiv}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

4. Les condensateurs ele-nccir.17

ele-nccir.18 Comme nous l'avons vu, la tension (ou différence de potentiel) aux bornes d'un condensateur est donnée par

$$U = \frac{Q}{C}$$

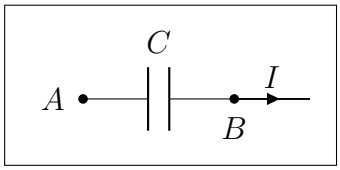
Par conséquent, en dérivant par rapport au temps, on trouve

$$\dot{U} = \frac{I}{C}$$

où I est le courant traversant le condensateur.

ele-nccir.19 Soyons plus précis concernant le signe du courant:

$$U_{AB} = \frac{Q_+}{C} \overset{I=\dot{Q}_+}{\Rightarrow} \dot{U}_{AB} = \frac{I}{C}$$



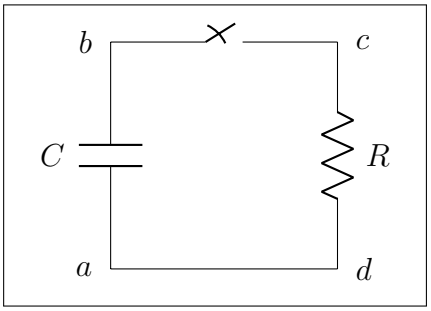
où le courant $I > 0$ dans le sens de la flèche et $I < 0$ dans le sens contraire. Rappelons que par convention, le courant indique le mouvement des charges positives.

En effet, imaginons par exemple que la plaque de gauche du condensateur soit positive (et donc celle de droite est négative). Alors $U_{AB} > 0$. Si le courant est dans le sens de la flèche, cela signifie que la plaque de droite se charge négativement et donc $\dot{U}_{AB} > 0$. De façon similaire, si c'est la plaque de droite du condensateur qui est positive, alors $U_{AB} < 0$. Si le courant est dans le sens de la flèche, alors la charge de la plaque de droite diminue et $\dot{U}_{AB} > 0$.

5. Circuits RC ele-nccir.20 [1 - B. Ischi 24-25]

5.1. Décharge d'un condensateur à travers une résistance. ele-nccir.21 [1 - B. Ischi 15-16]

ele-nccir.22 On charge un condensateur puis on ferme le commutateur du circuit représenté sur la figure ci-contre. En vertu des lois de Kirchhoff, il vient (nous posons $I \circlearrowleft > 0$)



$$U_{ab} + U_{cd} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{-Q_+}{C} + RI = 0$$

$$\overset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow}\; \frac{-\dot{Q}_+}{C} + R\dot{I} = 0 \overset{-\dot{Q}_+=I}{\Rightarrow} \frac{I}{C} + R\dot{I} = 0$$

$$R\dot{I} = -\frac{I}{C} \;\Rightarrow\; I(t) = I_0 \mathrm{e}^{-t/(RC)}$$

où I représente la valeur absolue du courant. Le sens du courant est déterminé par la charge initiale du condensateur. Par exemple, si initialement, la plaque supérieur du condensateur est positive, alors le courant tournera dans le sens horaire $\circlearrowleft$. Par ailleurs,

$$RI_0 = \frac{|Q_0|}{C} \;\Rightarrow\; I_0 = \frac{|Q_0|}{RC}$$

Conclusion: le courant décroît de manière exponentielle.

ele-nccir.23 On considère le circuit représenté sur la figure 1. On charge le condensateur en mettant le commutateur en position 1 et on le décharge en mettant le commutateur en position 2. Lorsque le commutateur est en position 1, en vertu des lois de Kirchhoff, il vient ($U_0 > 0$)

$$U_{BA} + U_{AD} + U_{DB} = 0 \;\Rightarrow\; -U_0 + \frac{Q}{C} + RI = 0$$

$$\overset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow} 0 + \frac{I}{C} + R\dot{I} = 0 \;\Rightarrow\; I(t) = I_0 \mathrm{e}^{-t/(RC)} \text{ avec } U_0 = RI_0$$

Par ailleurs, la charge du condensateur est donnée par,

$$|Q(t)| = \int_0^t I(\tau)\, d\tau = -I_0 RC \mathrm{e}^{-t/(RC)} + I_0 RC = I_0 RC \left(1 - \mathrm{e}^{-t/(RC)}\right) = U_0 C \left(1 - \mathrm{e}^{-t/(RC)}\right)$$

Par ailleurs, en vertu de la Loi de Kirchhoff,

$$U_{AD} = -U_{BA} - U_{DB} = U_0 - RI = U_0 - RI_0 \mathrm{e}^{-t/(RC)} = U_0 \left(1 - \mathrm{e}^{-t/(RC)}\right)$$

5.2. Tube à décharges. ele-nccir.24

ele-nccir.25 En disposant aux bornes d'une capacité un tube à décharges (voir figure 2) qui la court-circuite lorsque la tension atteint une valeur U_a (tension d'allumage) et qui la branche pour une tension U_e (tension d'extinction), on obtient une répétition du phénomène sous forme d'oscillations de relaxation. Si la résistance interne du tube est beaucoup plus petite que la

résistance R, la décharge est quasi-instantanée. La période T est donnée par

$$\begin{cases} U_a = U_0\left(1-\mathrm{e}^{-t_1/(RC)}\right) \;\Rightarrow\; t_1 = -RC\ln(1-U_a/U_0) \\ U_e = U_0\left(1-\mathrm{e}^{-t_0/(RC)}\right) \;\Rightarrow\; t_0 = -RC\ln(1-U_e/U_0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow\; T = t_1 - t_0 = -RC\ln\left(\frac{U_0-U_a}{U_0-U_e}\right) = RC\ln\left(\frac{U_0-U_e}{U_0-U_a}\right)$$

5.3. Impédance d'un circuit RC série. ele-nccir.26 ele-nccir.27 Un circuit RC série est soumis à une tension alternative

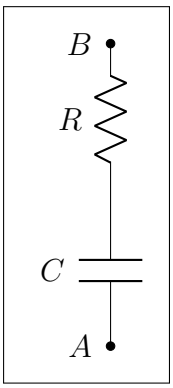
$$U_{BA} = U_0\sin(\omega t)$$

où $U_0 > 0$. Alors, en vertu de la Loi de Kirchhoff,

$$U_{BA} = RI + \frac{Q}{C} \overset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow} \dot{U}_{BA} = R\dot{I} + \frac{I}{C}$$

c'est-à-dire

$$\frac{I}{C} + R\dot{I} = U_0\omega\cos(\omega t)$$



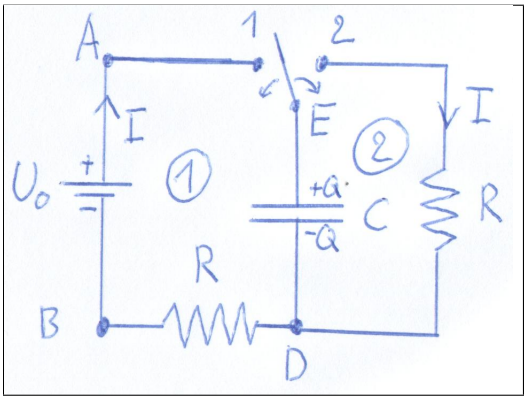


FIGURE 1. Charge d'un condensateur.

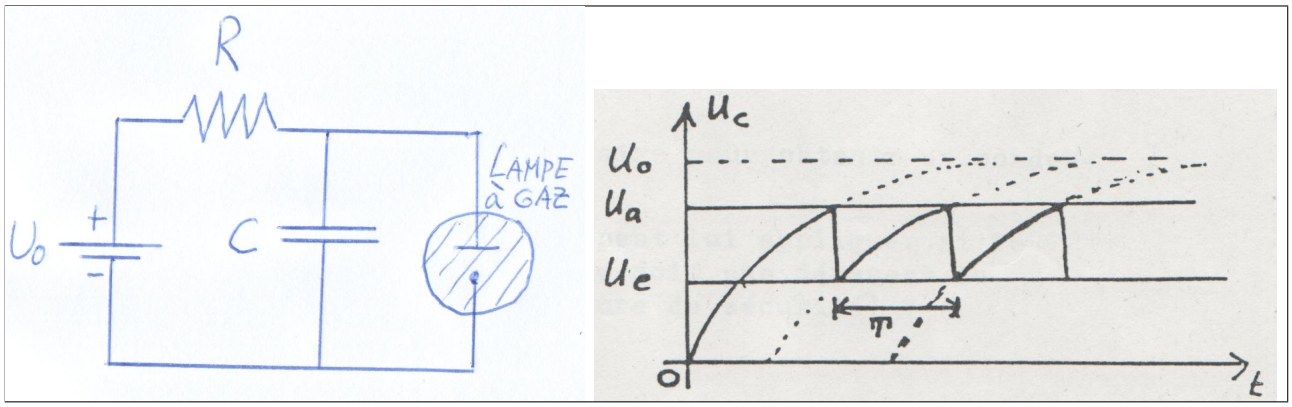


FIGURE 2. Tube à décharges.

ele-nccir.28 La solution générale de l'équation homogène est donnée par

$$I(t) = I_0 \mathrm{e}^{-t/(RC)}$$

Pour trouver une solution particulière de l'équation complète, il faut poser

$$I(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

En substituant dans l'équation différentielle, on obtient

$$\frac{a}{C}\cos(\omega t) + \frac{b}{C}\sin(\omega t) - Ra\omega\sin(\omega t) + Rb\omega\cos(\omega t) = U_0\omega\cos(\omega t)\ \forall\ t$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \frac{a}{C} + Rb\omega = U_0\omega \\ \frac{b}{C} - Ra\omega = 0 \end{cases} \Rightarrow\ a = \frac{\omega C U_0}{1 + R^2\omega^2C^2} \text{ et } b = \frac{R\omega^2C^2U_0}{1 + R^2\omega^2C^2}$$

ele-nccir.29 Rappelons la formule trigonométrique:

$$a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = A\sin(\omega t + \delta)$$

En effet, comme

$$A\sin(\omega t + \delta) = A\cos(\omega t)\sin(\delta) + A\sin(\omega t)\cos(\delta)$$

il suit que, en posant $t = 0$,

$$a = A\sin(\delta)$$

et en posant $t = \frac{\pi}{2\omega}$, il vient

$$b = A\sin\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right) = A\cos(\delta)$$

Par conséquent,

$$a^2 + b^2 = A^2\ \Rightarrow\ A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

et

$$\tan(\delta) = \frac{a}{b} \text{ et } \mathrm{sign}(\sin(\delta)) = \mathrm{sign}(a)$$

ele-nccir.30 Avec cette formule, il suit que

$$I(t) = I_{max}\sin(\omega t + \delta)$$

où

$$I_{max} = \frac{\sqrt{\omega^2C^2U_0^2 + R^2U_0^2\omega^4C^4}}{1 + R^2\omega^2C^2} = \frac{U_0\omega C}{\sqrt{1 + R^2\omega^2C^2}}$$

et

$$\tan(\delta) = \frac{1}{R\omega C}$$

ele-nccir.31 On définit l'impédance du circuit comme

$$Z = \frac{U_{max}}{I_{max}}$$

C'est l'équivalent de

$$R = \frac{U}{I}$$

pour du courant alternatif. Dans notre cas, il vient

$$Z = \frac{U_0}{I_{max}} = \sqrt{\frac{1}{\omega^2 C^2} + R^2}$$

On définit l'admittance comme l'inverse de l'impédance:

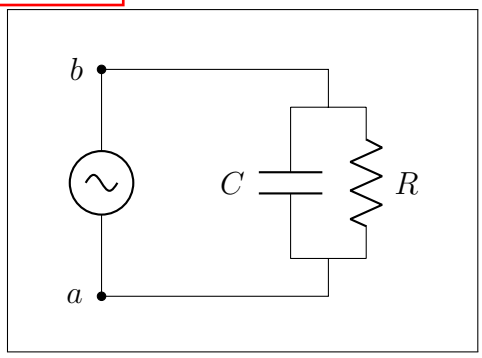
$$Y := \frac{1}{Z}$$

ele-nccir.32 Remarquons que pour $R = 0$, il vient

$$Z = \frac{1}{\omega C} \text{ et } \delta = \frac{\pi}{2}$$

5.4. Impédance d'un circuit RC parallèle. ele-nccir.33

ele-nccir.34 [1 - B. Ischi 24-25] La tension U_{ab} du circuit représenté ci-contre est périodique de période T:



$$U_{ab}(t) = U_0 \sin(\omega t) \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

On note I_1 le courant qui passe la branche de gauche du circuit, I_2 le courant qui passe la branche de droite du circuit et I le courant qui passe par le point b.

ele-nccir.35 On trouve:

$$U = RI_2 \text{ et } U = \frac{Q_1}{C} \;\Rightarrow\; \dot{U} = \frac{I_1}{C}$$

et

$$I = I_1 + I_2 = C\dot{U} + \frac{U}{R} = CU_0\omega\cos(\omega t) + \frac{U_0}{R}\sin(\omega t)$$

c'est-à-dire

$$I = U_0\left(\sqrt{\frac{1}{R^2} + (C\omega)^2}\right)\sin(\omega t + \varphi)$$

Il suit que l'admittance est donnée par

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{I_{max}}{U_0} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + (C\omega)^2}$$

6. Circuits RLC ele-nccir.36

6.1. Impédance d'un circuit RLC série. ele-nccir.37 [1 - B. Ischi 18-19] ele-nccir.38 [1 - B. Ischi 24-25]

On considère un circuit RLC série comme sur la figure 3. On note I le courant dans le circuit. Le courant dépend du temps. La fonction $I(t)$ est une solution de l'équation différentielle

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{I}{C} = \dot{U}(t)$$

où C désigne la capacité du condensateur (unité: farad), R la résistance (unité: ohm), L le coefficient d'auto-induction de la bobine (unité: henry) et $U(t)$ est la tension aux bornes du générateur. On note $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\alpha = \frac{R}{2L}$. On considère le régime sous-critique (amortissement faible) en supposant que

$$\alpha < \omega_0$$

La solution générale de l'équation homogène est donnée par

$$I(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\left(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right) \text{ avec } \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

La solution générale de l'équation homogène s'ajoute à une solution de l'équation complète. Elle décrit un régime transitoire.

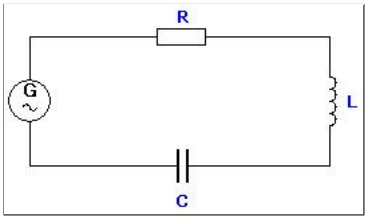


FIGURE 3. Circuit RLC série

On suppose que $\dot{U}(t) = U_0\sin(\omega t)$. Comme $\dot{U}(t)$ n'est pas une solution de l'équation homogène, on fait l'Ansatz $I(t) = a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t)$ On trouve

$$\begin{aligned} I(t) &= a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t) \\ \dot{I}(t) &= a\omega\cos(\omega t) - b\omega\sin(\omega t) \\ \ddot{I}(t) &= -a\omega^2\sin(\omega t) - b\omega^2\cos(\omega t) \end{aligned}$$

En substituant dans l'équation inhomogène, on trouve

$$\begin{aligned} -a\omega^2 L - Rb\omega + \tfrac{a}{C} &= U_0 \\ -b\omega^2 L + Ra\omega + \tfrac{b}{C} &= 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} -a\omega^2 - 2\alpha b\omega + a\omega_0^2 &= \tfrac{U_0}{L} \\ -b\omega^2 + 2\alpha a\omega + b\omega_0^2 &= 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$b = \frac{2\alpha\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}a$$

et

$$a\left(\omega^2+\frac{(2\alpha\omega)^2}{\omega^2-\omega_0^2}-\omega_0^2\right)=-U_0/L \;\Rightarrow\; a=\frac{-U_0/L}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\alpha^2\omega^2}(\omega^2-\omega_0^2)$$

Il suit que

$$I(t)=I_0\cos(\omega t-\phi)$$

avec

$$I_0=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2\left[1+\left(\frac{2\alpha\omega}{\omega^2-\omega_0^2}\right)^2\right]}=|a|\frac{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\alpha^2\omega^2}}{|\omega^2-\omega_0^2|}=\frac{U_0/L}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\alpha^2\omega^2}}$$

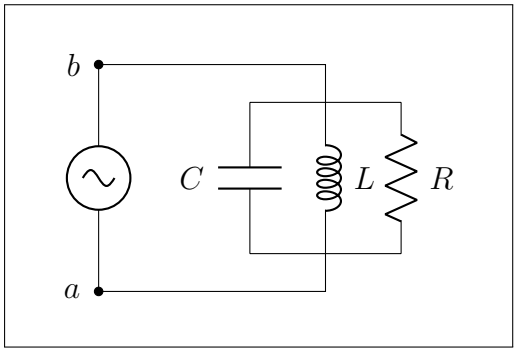
De plus, $U(t)=-\frac{U_0}{\omega}\cos(\omega t)$. Par conséquent,

$$Z=\frac{U_{\max}}{I_{\max}}=\frac{\frac{U_0}{\omega}}{\frac{U_0}{L\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\alpha^2\omega^2}}}=\frac{L}{\omega}\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\alpha^2\omega^2}$$

$$=\frac{L}{\omega}\sqrt{\left(\omega^2-\frac{1}{LC}\right)^2+\frac{L^2}{R^2}\omega^2}=\sqrt{\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2+R^2}$$

6.2. Impédance d'un circuit *RLC* parallèle.

ele-nccir.39 [1 - B. Ischi 18-19] ele-nccir.40 [1 - B. Ischi 24-25] La tension U_{ab} du circuit représenté ci-contre est périodique de période T:



$$U_{ab}(t)=U_0\sin(\omega t)\qquad \omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi\nu$$

On note I_1 le courant qui passe la branche de gauche du circuit, I_2 le courant qui passe la branche du milieu , I_3 le courant qui passe la branche de droite du circuit et I le courant qui passe par le point b.

ele-nccir.41 On trouve

$$U=\frac{Q_1}{C}=L\dot{I}_2=RI_3 \;\Rightarrow\; I_1=CU_0\omega\cos(\omega t),\; I_2=-\frac{U_0}{L\omega}\cos(\omega t),\; I_3=\frac{U_0}{R}\sin(\omega t)$$

et

$$I=I_1+I_2+I_3=U_0\left(C\omega-\frac{1}{L\omega}\right)\cos(\omega t)+\frac{1}{R}\sin(\omega t)=U_0\left(\sqrt{\left(C\omega-\frac{1}{L\omega}\right)^2+\frac{1}{R^2}}\right)\sin(\omega t+\varphi)$$

Par conséquent, l'admittance est donnée par

$$Y=\frac{1}{Z}=\frac{I_{max}}{U_0}=\sqrt{\left(C\omega-\frac{1}{L\omega}\right)^2+\frac{1}{R^2}}$$